DOI:10.13990/j.issn1001-3679.2008.06.004

第 26卷 第 6期
2008年 12月

江 西 科 学
JIANGXI SCIENCE

Vol.26 No.6
Dec. 2008

文章编号:1001-3679(2008)06-0851-04

关于 Smarandache LCM比推数列的归约公式

李 有 成

(渭南职业技术学院,陕西 渭南 714000)

摘要:研究 Smarandache问题中 LCM(最小公倍数)比推数列的归约公式,采用分类讨论的方法得出了 Smarandache问题中 LCM比推数列 SLRS(5)的精确归约公式,本文解决了文献[1]中的部分问题,对于 Smarandache问题中的数列有推动作用。

关键词:Smarandache LCM比推数列;归约公式;最小公倍数

中图分类号:O156.4 文献标识码:A

Reduction Formulas for Smarandache Lcm ratio Sequences

LI You-cheng

(Weinan Vocational Technical College, Shaanxi Weinan 714000 PRC)

Abstract: This article mainly studies in the Smarandache question LCM (least common multiple) ratio sequence of reduction formula utilizing the surplus kind of nature in the primary theory of numbers in this foundation and using the classified discussion the method to obtain in the Smarandache question LCM ratio sequence SLRS(5) to be precise reduction formula, this article has solved the partial questions of the article[1], had the impetus function regarding the Smarandache question in sequence.

Key words: Smarandache LCM ratio sequences; Reduction formula; Least common multiple

1 引理及主要结论

对于任意正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ ($t>1$),$(x_1, x_2, \cdots, x_t)$代表最大公约数,$[x_1, x_2, \cdots, x_t]$代表这 t 个数的最小公倍数。r是一个大于 1的正整数,对于任意的正整数 n,有

$$T(r, n)=\frac{[n, n+1, \cdots, n+r-1]}{[1, 2, \cdots, r]} \quad (1)$$

$SLRS(r)=\{T(r, n)\}_{n=1}^{\infty}$被叫做 r级 Smarandache LCM比推数列,很明显,$T(2, n)=\frac{1}{2}n(n+1)$。部分专家针对这一 Smarandache问题运用最小公倍数和最大公约数的性质研究了 $r=3$和 $r=4$时的归约公式,本文做出当 $r=5$时的归约公式。

定理 1:对于任意正整数 n,有

收稿日期:2008-08-10;修订日期:2008--

作者简介:李有成(1965-)男,陕西渭南人,副教授,从事数论研究。

基金项目:国家自然科学基金项目(10271093)。

$$T(5,n)=\begin{cases}\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) & n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\ n+1\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\\ \frac{1}{240}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) & n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\ n+1\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\\ \frac{1}{360}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) & \begin{cases}n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\\ \text{或}\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\ n+1\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\end{cases}\\ \frac{1}{480}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) & n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\ n+1\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\\ \frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) & \begin{cases}n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\ n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\\ \text{或}\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}\\ \frac{1}{1440}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) & \begin{cases}n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\ n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\\ \text{或}\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}\end{cases}$$

2 定理及其证明

在引言的基础上,本文进而推广得到 SLRS(5)的归约公式。虽然 $[n,n+1,n+2,n+3,n+4]=[n(n+1),(n+2)(n+3),n+4]$,但是 $[n(n+1),(n+2)(n+3),n+4](n(n+1),(n+2)(n+3),n+4)\neq n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$。所以引理中任意 2个整数推广到任意 3个以及 3个以上正整数时并不成立, $T(r,n)$的归约公式,关键是要求出 $[n,n+1,n+2,n+3,n+4]$,在此将 n分别分类进行说明。由于同余关系是等价关系,所以用它可以把整数集划分为若干个等价类。

(1)若 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, $n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, $n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$

[n,	n+1,	n+2,	n+3,	n+4]
偶		偶		偶
2	3	4	5	6
10	11	12	13	14
14	15	16	17	18
22	23	24	25	26
26	27	28	29	30
34	35	36	37	38
38	39	40	41	42

相邻三偶数 $[n,n+2,n+4]=\frac{1}{4}[n(n+2)(n+4)]$,相邻奇数 $[n+1,n+3]=(n+1)(n+3)$,若 $n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$时,则 $n+4\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$,所以

$$\begin{cases}\text{当 } n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\text{时},\ [n,n+1,n+2,n+3,n+4]=\frac{1}{12}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]\\ \text{当 } n+1\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\text{时},\ [n,n+1,n+2,n+3,n+4]=\frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]\end{cases}$$

(2)若 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, $n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$

[n,	n+1,	n+2,	n+3,	n+4]
	偶		偶	
3	4	5	6	7
9	10	11	12	13
15	16	17	18	19
21	22	23	24	25
27	28	29	30	31
33	34	35	36	37

两相邻偶数 $[n+1,n+3]=\frac{1}{2}[(n+1)(n+3)]$,又因为 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, $n+3\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$,所以 $[n,n+3]=\frac{1}{3}[n(n+3)]$,所以此时

$$[n,n+1,n+2,n+3,n+4]=\frac{1}{6}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]。$$

(3) $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$, $n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$

[n,	n+1,	n+2,	n+3,	n+4]
偶		偶		偶
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
16	17	18	19	20
20	21	22	23	24
28	29	30	31	32
32	33	34	35	36
40	41	42	43	44

三相邻偶数,又因为 $n\equiv 0(\bmod 4)$, $n+4\equiv 0(\bmod 4)$,所以 $[n, n+2, n+4]=\frac{1}{8}[n(n+2)(n+4)]$,若 $n+1\equiv 0(\bmod 3)$,则 $n+4\equiv(\bmod 3)$,所以

$$\begin{cases}[n, n+1, n+2, n+3, n+4]=\frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),\text{当 } n+1\not\equiv 0(\bmod 3)\text{时}\\ [n, n+1, n+2, n+3, n+4]=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),\text{当 } n+1\equiv 0(\bmod 3)\text{时}\end{cases}$$

(4) $n\equiv 0(\bmod 2)$, $n\equiv 0(\bmod 3)$, $n\not\equiv 0(\bmod 4)$

[n,	n+1,	n+2,	n+3,	n+4]
偶		偶		偶
6	7	8	9	10
18	29	20	21	22
30	31	32	33	34
42	43	44	45	46
54	55	56	57	58

三相邻偶数 $[n, n+2, n+4]=\frac{1}{4}[n(n+2)(n+4)]$,且 $n\equiv n+3\equiv 0(\bmod 3)$,所以

$$[n, n+1, n+2, n+3, n+4]=\frac{1}{12}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]。$$

(5)若 $n\equiv 0(\bmod 3)$, $n\equiv 0(\bmod 4)$

[n,	n+1,	n+2,	n+3,	n+4]
偶		偶		偶
12	13	14	15	16
24	25	26	27	28
36	37	38	39	40
48	49	50	51	52
60	61	62	63	64

三相邻偶数 $[n, n+2, n+4]=\frac{1}{8}[n(n+2)(n+4)]$,因为, $n\equiv n+4\equiv 0(\bmod 4)$, $n\equiv n+3\equiv 0(\bmod 3)$,所以 $[n, n+3]=\frac{1}{3}[n(n+3)]$,所以

$$[n, n+1, n+2, n+3, n+4]=\frac{1}{24}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]。$$

(6)若 $n\not\equiv 0(\bmod 2)$, $n\not\equiv 0(\bmod 3)$, $n\not\equiv 0(\bmod 4)$

[n,	n+1,	n+2,	n+3,	n+4]
	偶		偶	
5	6	7	8	9
7	8	9	10	11
11	12	13	14	15
13	14	15	16	17
17	18	19	20	21
19	20	21	22	23
23	24	25	26	27
25	26	27	28	29

两相邻偶数 $[n+1, n+3]=\frac{1}{2}[(n+1)(n+3)]$,若 $n+1\equiv 0(\bmod 3)$, $[n, n+1, n+2, n+3, n+4]=\frac{1}{6}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]$;若 $n+1\not\equiv 0(\bmod 3)$,

$$[n, n+1, n+2, n+3, n+4]=\frac{1}{2}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]。$$

(下转第 857页)

由引理 4和 5可知,上式可导出 $\sigma_2(f)=\sigma_2(g)\le\sigma+\varepsilon$。由 ε的任意性及式(10),可得 $\sigma_2(f)=\sigma$。

4　定理 2的证明

假设 f为方程(3)的亚纯解。由定理 1易知, $\sigma(f)=\infty$,至多除去一个有限级例外解 f_0。由式(10)与引理 7易得, $\mu(f)=\infty$,至多除去一个例外解 f_0。

对亚纯解 $f\not\equiv f_0$, $\sigma(f)=\infty$, $\mu(f)=\infty$,从而由题设知, $\lambda(1/f)<\mu(f)$,则由引理 9可知, $\sigma_2(f)\le\sigma(A_0)$;对亚纯解 f_0, $\sigma(f_0)<\infty$,显然有 $\sigma_2(f_0)\le\sigma(A_0)$。从而方程(3)的所有亚纯解 f满足 $\sigma_2(f)\le\sigma(A_0)$。

可以断言,方程(3)每一亚纯解 f满足 $\sigma_2(f)=\sigma(A_0)$,至多除去一个例外解 f_0。

事实上,如果方程(3)存在亚纯解 $f_1(\not\equiv f_0)$满足 $\sigma_2(f_1)<\sigma(A_0)$,则 $\sigma_2(f_1-f_0)\le\max\{\sigma_2(f_1),\sigma_2(f_0)\}<\sigma(A_0)$。但 f_1-f_0为对应的齐次方程(2)的解,从而 $\sigma_2(f)=\sigma(A_0)$。矛盾。

从而由引理 9可得, $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\mu(f)=\sigma(f)=\infty$, $\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(A_0)$,至多除去一个例外解 f_0。

参考文献:

[1] Hayman W. Meromorphic Functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] 杨　乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[3] 何育赞, 萧修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1988.

[4] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[5] Chen Zong-xuan. Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations[J]. Kodai Math J, 1999, 22(2): 273-285.

[6] Belaidi B. Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions[J]. E J Qualitative Theory of Diff Equ, 2002, (5): 1-8.

[7] Gundersen G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates[J]. London Math Soc, 1988, 37(2): 88-104.

[8] 陈宗煊. 关于高阶线性微分方程亚纯解的增长率[J]. 数学学报, 1999, 42(3): 551-558.

[9] 陈宗煊. 二阶亚纯系数微分方程亚纯解的零点[J]. 数学物理学报, 1996, 16(3): 276-283.

[10] 高仕安, 陈宗煊, 陈特为. 线性微分方程的复振荡理论[M]. 武昌: 华中理工大学出版社, 1997.

[11] Chen Zong-xuan, Yang Chung-chun. Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations[J]. Complex Variables, 2000, 42: 119-133.

[12] 陈　玉, 陈宗煊. 几类高阶线性微分方程亚纯解的增长性[J]. 数学研究与评论, 2007, 27(4): 826-832.

(上接第 853页)

把以上 6类进行整理,相同归约公式的数归为一类,便得到定理中的归约公式。

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Apostol Tom M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[3] Guy R K. Unsolved problems in Number Theory[M]. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1981.